Departamento de Economia/PUC-Rio **2023**
Estatistica

Lista 6

Essa lista não vale nota, mas ainda recomenda-se fazer antes da prova.

1. Casella e Berger, 8.16.

2. Casella e Berger, 8.33.

3. Seja T uma estatística de teste com a MLRP, isto é, para $\theta_0 < \theta_1$, $f_T(t|\theta_1)/f_T(t|\theta_0)$ é crescente em t.

   (a) Prove que, para $\theta_0 < \theta_1$, $F_T(t|\theta_1) \leq F_T(t|\theta_0)$.

   (b) Use essa desigualdade para provar que a função potência de um teste com $R = \{T > t_0\}$ é crescente.

   (c) Para um teste de hipótese unilateral $H_0 : \theta \leq \theta_0$, $H_1 : \theta > \theta_1$, prove que o teste acima tem tamanho $\alpha = \beta(\theta_0)$ e é não viesado.

4. Seja $\theta \in [-1, 1]$ um parâmetro. Considere uma amostra aleatória $X_1, \ldots, X_n$ com a densidade de cada observação sendo dada por

$$f_{X_i}(x_i; \theta) = \frac{1}{2}(1 + \theta x_i),$$

   para $x_1 \in [-1, 1]$ e 0 caso contrário.

   (a) Proponha um estimador consistente para θ. Mostre que ele de fato é consistente.

   (b) Suponha que uma única observação X_1 esteja disponível ($n = 1$). Desejamos testar a hipótese nula de que $\theta = 0$ versus a hipótese alternativa de que $\theta = 1$.

   Apresente a região crítica de um teste com as seguintes propriedades: 1) tem tamanho $\alpha = 0.05$; e 2) é o teste mais potente entre todos os testes de nível α.

   (c) Suponha que agora desejamos testar a hipótese nula $\theta \leq 0$ contra hipótese alternativa $\theta > 0$. Como precisamos adaptar a região crítica para obter um teste de tamanho $\alpha = 0.05$ uniformemente mais potente entre testes de nível α para essas novas hipóteses?

5. Um parâmetro θ pode assumir três valores, 1, 2 ou 3. Uma v.a. discreta X é observada, cuja distribuição depende de θ da seguinte forma:

	$\theta = 1$	$\theta = 2$	$\theta = 3$
$P_\theta(X = 4)$	$1/2$	0	$1/2$
$P_\theta(X = 5)$	$1/2$	$1/2$	0
$P_\theta(X = 6)$	0	$1/2$	$1/2$

Desejamos executar um teste da hipótese $H_0 : \theta = 1$, contra a alternativa $H_1 : \theta > 1$.

(a) Considere o teste A, com região de rejeição $R_A = \{X \geq 5\}$. Qual é o valor de α_A, o tamanho desse teste?

(b) Calcule β_A, a função potência desse teste.

(c) Prove que esse teste *não* é uniformemente mais potente de nível α_A.

(d) Explique porque, apesar de ser um teste da forma sugerida por Karlin e Rubin, para um teste de hipóteses unidirecional, o teorema de Karlin-Rubin não se aplica aqui.

(e) Apresente um outro teste (de tamanho menor que 1) que é UMP contra testes de mesmo nível.

6. Considere uma amostra $Z = Z_1, \ldots, Z_n$ i.i.d. exponencial com parâmetro λ, ou seja, onde Z_i tem densidade $f_{Z_i}(z_i, \lambda) = \lambda e^{-\lambda z_i} \mathbf{1}[z_i > 0]$. O valor de $\lambda > 0$ é desconhecido.

(a) Considere a hipótese nula $H_0 : \lambda = \lambda_0$ versus $H_1 : \lambda = \lambda_1$. Apresente uma estatística $T(Z)$ (que não depende de λ_0 ou λ_1) tal que o teste com região crítica $R = \{T(Z) \in I\}$, onde I é um intervalo, é o UMP entre testes de tamanho igual ou menor.

(b) É possível realizar esse teste se não observarmos Z, mas apenas $\bar{Z}$? E se observarmos apenas $Z_{(1)} = \min_i Z_i$?

(c) Mostre que para calcular a região crítica do teste apresentado no item anterior, não precisamos conhecer o valor de λ_1, mas apenas saber o tamanho α do teste, o valor de λ_0, e se $\lambda_1 > \lambda_0$ ou não.

(d) É possivel encontrar um teste UMP para $H_0 : \lambda = 2$ versus $H_1 : \lambda \in \{1, 3\}$? Justifique.