Departamento de Economia/PUC-Rio **2023**
Estatistica

Lista 4

1. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ identicamente distribuídos com $E(X_i) = \mu$ e $\mathrm{Var}(X_i) = \sigma^2$, **não necessariamente independentes**. Como sempre, $\bar{X} = \sum X_i/n$ e $S^2 = \sum(X_i - \bar{X})^2/(n-1)$.

   (a) Continua a ser verdade que $E(\bar{X}) = \mu$? Se sim, mostre. Se não, apresente valores a e b (como função de μ ou σ) tais que sempre $a \leq E(\bar{X}) \leq b$.

   (b) Continua a ser verdade que $\mathrm{Var}(\bar{X}) = \sigma^2/n$? Se sim, mostre. Se não, apresente valores a e b (como função de μ ou σ) tais que sempre $a \leq \mathrm{Var}(\bar{X}) \leq b$.

   (c) Continua a ser verdade que $E(S^2) = \sigma^2$? Se sim, mostre. Se não, apresente valores a e b (como função de μ ou σ) tais que sempre $a \leq E(S^2) \leq b$.

2. Prove a segunda parte do teorema de Slutsky: se $X_n \to X$ em distribuição e $Y_n \to a$ em probabilidade, então $X_n Y_n \to aX$ em distribuição.

3. Em cada uma das questões abaixo, responda se a sequência converge no sentido proposto. Se a resposta for sim, **apresente a v.a. ou o número para o qual a sequência converge**; se não, justifique.

   (a) (tudo ou nada) Considere um apostador jogando infinitas vezes num cassino. Ele tem inicialmente um real e aposta sempre tudo no vermelho da roleta. Seja $p \in (0,1)$ a probabilidade dele ganhar; se ele ganhar, sua aposta é dobrada. Seja Y_n o montante em n; $Y_1 = 1$, e $Y_n = 2Y_{n-1}$ com probabilidade p e 0 com probabilidade $1-p$.

      i. $Y_1, Y_2 \ldots$ converge quase certamente?

      ii. e em média quadrática?

   (b) Sejam U e V duas v.a.s independentes com distribuição normal padrão (média 0 e variância 1). Sejam $X_1 = U$, $X_2 = V$, $X_3 = U$, $X_4 = V$, etc.

i. A sequência $X_1, X_2, \ldots$ converge em distribuição?

ii. e em probabilidade?

iii. $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ converge em probabilidade?

4. (Por que normal?)

   (a) Mostre que a distribuição normal padrão tem a seguinte propriedade: se Y, Z i.i.d. $N(0,1)$, então $(Y+Z)/\sqrt{2} \sim N(0,1)$.

   (b) Considere uma amostra aleatória $X_1, \ldots, X_n$, com $E[X_i] = \mu$ e n par. Defina $P_n = (2/n)\sum_i X_{2i}$ e $I_n = (2/n)\sum_i X_{2i-1}$, a média dos termos pares e dos termos ímpares na amostra. Suponha que saibamos que $\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu) \sim F$ (mas não sabemos se F é a normal). Argumente que $\sqrt{n/2}(P_n - \mu) \sim F$ e $\sqrt{n/2}(I_n - \mu) \sim F$.

   (c) Conclua que se $\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)$ converge em distribuição para F, então F precisa ter a propriedade do item a.

5. (Por que anormal?) Considere uma distribuição F (não degenerada) com a seguinte propriedade: Se $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. F, então $\bar{X}_n \sim F$. (Uma distribuição que tem essa propriedade é a distribuição de Cauchy.) Use a lei dos grandes números para provar que a esperança de F não pode existir.