Departamento de Economia/PUC-Rio **2023**
Estatistica

Lista 3

1. (P1, 2009) Sejam X e Y variáveis aleatórias independentes com distribuição uniforme entre 0 e 1, ou seja, têm densidade conjunta $f_{XY}(x,y) = 1$ se $x \in [0,1]$ e $y \in [0,1]$ e $f_{XY}(x,y) = 0$ caso contrário. Seja $T = (X+Y)/2$.

   (a) Qual é a distribuição de $T|X = x$?

   (b) Qual é a distribuição de $X|T = t$?

   (c) Qual é a distribuição de T?

2. (P1, 2011) Sejam duas variáveis aleatórias X e Y onde X tem distribuição $U[0,1]$ e $Y|X$ tem distribuição $U[X, X+1]$ (ou seja, $f_X(x) = 1$ para $x \in [0,1]$ e 0 c.c., e $f_{Y|X}(y|x) = 1$ se $y \in [x, x+1]$ e 0 c.c., para todo x.)

   (a) Calcule a densidade marginal de Y.

   (b) Considere a transformação $g(x,y) = x+y$; calcule a densidade da variável aleatória $g(1,Y) = 1+Y$.

   (c) Calcule a densidade de $g(X,Y) = X+Y$ condicional a $X = 1$. Como essa resposta se compara com a do item b?

   (d) Demonstre o seguinte resultado: Dado um vetor aleatório (X_1, X_2), a distribuição de $h(X_1, t)$ é a mesma que a distribuição de $h(X_1, X_2)$ condicional a $X_2 = t$ (quase certamente) para todo h (mensurável) se e somente se X_1 e X_2 são independentes. Na demonstração, você pode considerar apenas o caso de um vetor aleatório absolutamente contínuo (i.e., com densidade conjunta).

3. Sejam U e V v.a.'s independentes, com $f_U(x) = f_V(x) = e^{-x}$, para $x > 0$ e 0 c.c. Obtenha a densidade condicional de U dado $U+V$.

4. Sejam X e Y v.a.'s independentes, ambas com distribuição uniforme entre 0 e 1. Seja $W = X^2$.

   (a) W é uma v.a. absolutamente contínua? Se sim, obtenha uma expressão para a a densidade de W; se não, explique.

(b) Obtenha a distribuição conjunta de (X, W). Obtenha a distribuição conjunta de (Y, W). (Note que, apesar de ambas as marginais serem iguais, as conjuntas são diferentes.)

(c) (X, W) e/ou (Y, W) são vetores aleatórios absolutamente contínuos? Se sim, obtenha a densidade conjunta.

5. (P1, 2020) Assim como a esperança, a *mediana* é um atributo numérico de um distribuição (ou seja, um número que pode ser calculado a partir da distribuição). Como no caso da esperança, podemos definir a *mediana de* Y, $m(Y)$ tal que

$$P(Y \leq m(Y)) = 1/2$$

e a mediana condicional de Y dado X, $m(Y|X)$ que satisfaz

$$P(Y \leq m(Y|X) \mid X) = 1/2.$$

(note que $m(Y|X)$ é uma v.a., assim como $E(Y|X)$).[1]

Sabemos que existe um conexão simples e poderosa entre a esperança e a esperança condicional, a lei das expectativas iteradas. Será que existe algo análogo para as medianas?

(a) É correto afirmar que

$$m(m(Y|X)) = m(Y)?$$

Se sim, prove, se não, dê contra-exemplo.

(b) É correto afirmar que

$$E(m(Y|X)) = m(Y)?$$

Se sim, prove, se não, dê contra-exemplo.

(c) Sejam $\underline{m} = \min\{m(Y|X)\}$ e $\overline{m} = \max\{m(Y|X)\}$. Podemos afirmar que

$$\underline{m} \leq m(Y) \leq \overline{m}?$$

Se sim, prove, se não, dê contra-exemplo.

[1]Para evitar complicações, ao longo do exercício você pode supor que para cada distribuição considerada é absolutamente contínua, para garantir que um único valor satisfaça a definição acima. Se quiser trabalhar com v.a.s discretas, pode supor que a mediana é sempre um único ponto de descontinuidade onde a distribuição ultrapassa $1/2$, ou seja, a mediana de Y é $m(Y)$ tal que $P(Y \leq m(Y)) \geq 1/2$ e $P(Y \geq m(Y)) \geq 1/2$.

(d) Podemos afirmar que

$$E[P(Y \leq m(Y|X))] = E[P(Y \leq m(Y))]?$$

Na sua opinião, qual das três igualdades acima é um análogo correto para a lei das expectativas iteradas?

6. X e Y são duas variáveis aleatórias com variância finita e positiva com a seguinte propriedade: $E(Y|X) = a + bX$, onde a e b são constantes.

   (a) Calcule EY e use sua resposta para obter uma fórmula para a como função de b e das esperanças de X e Y.

   (b) Calcule $\text{Cov}(X, Y)$ e use sua resposta para obter uma fórmula para b como função das variâncias e covariância de X e Y.

   (c) Usando sua resposta nos itens anteriores e o fato de que a correlação entre duas variáveis aleatórias é sempre menor que 1 em valor absoluto, prove que $\text{Var}(E(Y|X)) \leq \text{Var}(Y)$.

7. Sejam $X_1, \ldots, X_n$, independentes mas **não identicamente distribuídos**; chame $E(X_i) = \mu_i$ e $\text{Var}(X_i) = \sigma_i^2$. Como sempre, $\bar{X} = \sum X_i/n$ e $S^2 = \sum(X_i - \bar{X})^2/(n-1)$. Calcule $E(\bar{X})$, $\text{Var}(\bar{X})$ e $E(S^2)$.

8. Para cada uma das das estatísticas abaixo, descubra a sua distribuição assintótica (ou seja, obtenha uma expressão na forma $a(n)(T_n - b) \sim F$, onde T_n é a estatística de interesse, $a(n)$ uma função de n, b uma constante, e F uma distribuição conhecida.

   (a) $T_n = (\bar{X}_n)^2$, onde X_i i.i.d. $\chi^2(1)$.

   (b) $T_n = (\bar{X}_n)^2$, onde X_i i.i.d. $N(0, 1)$.