Departamento de Economia/PUC-Rio **2023**
Estatistica

Lista 2

1. Seja X uma variável aleatória (v.a.) com densidade $f(x) = C/x^k$, se $x > 1$, e $f(x) = 0$, se $x \leq 1$, onde k é um número inteiro e C um número real.

   (a) Para que valores de k essa função é de fato uma densidade? Dado k satisfazendo essa condição, determine o valor necessário para C.

   (b) Dado k satisfazendo o item a, para que valores de n temos $E(|X|^n) < \infty$?

   (c) Prove a seguinte propriedade, válida para uma v.a. Y qualquer: Se $E(|Y|^n) < \infty$, e $m < n$, então $E(|Y|^m) < \infty$, embora possivelmente $E(|Y|^n) < E(|Y|^m)$. (Dica: para que valores de x vale $x^n < x^m$?)

2. Seja X com distribuição exponencial, ou seja, com densidade $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ para $x \geq 0$, e $f(x) = 0$ para $x < 0$, onde $\lambda > 0$. Calcule a distribuicao de X, $E(X)$ e $\mathrm{Var}(X)$.

3. Para X uma v.a. não negativa ($X \geq 0$), mostre que vale

$$E[X] = \int_0^\infty (1 - F_X(x))dx$$

   Você pode supor que X é absolutamente contínua (a.c.), embora a fórmula valha em geral.[1]

4. Se X é uma v.a. com densidade $f_X = (1/\sqrt{2\pi})e^{-x^2/2}$, qual é a densidade de $Y = |X|$? Qual é a esperança e variância de Y?

5. (Atirando para todo lado) Uma parede (extendendo-se infinitamente para cima e para baixo) é posta a um metro de um canhão. Um ângulo X em radianos ao acaso é escolhido para o canhão (ou seja, $f_X(x) =$

[1] Uma variável aleatória X é absolutamente contínua se existe um $f(x)$ tal que $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$. Nesse caso, F_X é contínua e diferenciável em quase todo ponto (i.e. exceto em conjuntos de medida zero), com $F'_X(x) = f_X(x)$.

$1/\pi$, para $X \in [-\pi/2, \pi/2]$ e 0 caso contrário). Seja Y a altura do local onde a bala do canhão vai bater na parede, supondo uma trajetória reta.

(a) Compute a densidade de Y.

(b) Mostre que a altura *mediana* m do tiro é 0, onde m é o número que satisfaz $P(Y \leq m) = 1/2$.

(c) Mostre que contrariando expectativas, *não* podemos afirmar que a altura esperada $E[Y]$ do tiro é 0.

6. (P1 de 2012)

   (a) Para duas variáveis aleatórias X e Y quaisquer, prove que

   $$E[\max(X,Y)] = E[X] + E[Y] - E[\min(X,Y)]$$

   (b) Utilize a equação anterior para provar que, dados dois eventos A e B num espaço amostral,

   $$P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B]$$

7. (P1 de 2019) Seja X uma v.a. normal $(\mu, 1)$, com densidade $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2}$. Seja Z uma v.a. discreta com $Z = 1$ com probabilidade $1/2$ e $Z = -1$ com probabilidade $1/2$. Considere $Y = ZX$.

   (a) (X, Y) tem distribuição conjunta absolutamente contínua? Se sim, obtenha uma expressão para a densidade. Se não, justifique.

   (b) Y tem distribuição marginal absolutamente contínua? Se sim, obtenha uma expressão para a densidade. Se não, justifique.

   (c) Obtenha uma expressão para a esperança de Y, como função de μ.

   (d) Obtenha uma expressão para a covariância de X e Y, como função de μ.

   (e) Quando $\mu = 0$, qual a covariância de X e Y? Nesse caso, podemos afirmar que X e Y são independentes? Podemos afirmar que X e Y são identicamente distribuídas?

8. A função $F(x, y) = 1 - e^{-x-y}$ para $x, y \geq 0$ (e $= 0$ caso contrário) é estritamente crescente e varia de valor entre 0 e 1. No entanto, não é uma função distribuição conjunta. Por quê?