

Lista 1

1. Seja $\Delta_1, \Delta_2, \dots$ uma sequência de coleções de subconjuntos de Ω , tal que $\Delta_n \subset \Delta_{n+1}$ para cada n .
 - (a) Suponha que cada Δ_i é uma álgebra. Prove que $\bigcup_{i=1}^{\infty} \Delta_i$ também é uma álgebra.
 - (b) Suponha que cada Δ_i é uma σ -álgebra. Prove (por contra-exemplo) que $\bigcup_{i=1}^{\infty} \Delta_i$ talvez não seja uma σ -álgebra.
2. Sejam A, B, C e D eventos de um espaço amostral Ω , com $P(A) = P(B) = 0.01$, e $P(C) = P(D) = 0.99$.
 - (a) Prove que $P(A \cup B) \leq 0.02$.
 - (b) Prove que $P(C \cap D) \geq 0.98$.
 - (c) O que você pode dizer sobre $P(A \cap B)$ e $P(C \cup D)$?
3. Sejam A, B e A_1, A_2, \dots eventos num espaço amostral, com $A_n \nearrow A$, e $P(A) = 1$. Prove que $P(A_n \cap B) \rightarrow P(B)$.
4. Considere a seguinte sequência de eventos sobre o espaço amostral $\Omega = \{0, 1, 1/2, 1/3, 1/4, \dots\}$:

$$A_1 = \{1, 1/2, 1/3, 1/4, \dots\}, \quad A_2 = \{0, 1/2, 1/3, 1/4, \dots\},$$

$$A_3 = \{1/3, 1/4, \dots\}, \quad A_4 = \{0, 1/4, \dots\}, \dots$$

(formalmente, $A_n = \{1/k : k \geq n\}$ se n for ímpar, e se n for par, $A_n = \{1/k : k \geq n\} \cup \{0\}$).

- (a) Essa sequência de eventos *quase* converge monotonicamente...: mostre que $\bigcap_n A_n = \emptyset$, mas não $A_n \searrow \emptyset$.
- (b) ...mas *quase* não basta para convergência no vazio: prove, por meio de um exemplo, que não necessariamente $P(A_n) \rightarrow 0$. (Dica: *quase* qualquer exemplo funciona.)

5. Considere o espaço amostral $\Omega = [0, 1]$ (ou seja, ω é um número real entre zero e um). Para intervalos fechados $A = [a, b] \subset \Omega$, definimos $P(A) = b - a$.
- Você acredita que uma função definida dessa forma pode ser uma probabilidade? (Ela pode atender os axiomas de Kolmogorov?)
 - Qual deve ser o valor de $P((a, b))$ (ou seja, a probabilidade de um intervalo aberto) para respeitar os axiomas?
 - Eu fiquei confuso: eu achava que a resposta do item a era “sim”, mas estudando melhor essa função, descobri que $P(\{a\}) = 0$, para todo ponto a ; como todo conjunto é a união (disjunta) de seus pontos, $P(A)$ deveria ser uma soma de zeros, que dá 0!
Esclareça essa situação: Conclua que P não é uma probabilidade OU aponte o erro no raciocínio do parágrafo anterior.
6. Mostre que para um evento B dado com $P(B) > 0$, a função $Q : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $Q(A) = P(A|B)$ satisfaz todos os axiomas de probabilidade.
Mostre que, para um evento A dado, a função $R : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $R(B) = P(A|B)$ não os satisfaz.
7. Em sala, vimos um exemplo em que 3 eventos A , B e C são independentes 2 a 2, mas não mutuamente independentes.
- Apresente um exemplo em que $P(A) = P(B) = P(C) = 1/2$, $P(A \cap B \cap C) = 1/8$, mas A e B não são independentes. (Portanto, independência “3 a 3” não implica 2 a 2.)
 - No exemplo visto em classe, $P(A \cap B \cap C) > P(A)P(B)P(C)$. Apresente um outro exemplo em que A , B e C são independentes 2 a 2, mas não mutuamente independentes por que $P(A \cap B \cap C) < P(A)P(B)P(C)$.
8. Seja $\delta, \epsilon > 0$, e seja X_1, X_2, \dots uma sequência de variáveis aleatórias não-negativas tal que $P(X_i \geq \delta) \geq \epsilon$ para todo i . Prove que, com probabilidade 1, $\sum_{i=1}^{\infty} X_i = \infty$.
9. (Nessa questão você pode supor que a probabilidade de uma criança ser do sexo masculino é 50% e que a determinação do sexo de dois irmãos são eventos independentes.)

- (a) Eu sou pai de duas crianças. Meu filho mais velho é um menino. Com base nessas informações, qual a probabilidade dos dois serem meninos?
- (b) Eu sou pai de duas crianças. Um deles é um menino. Com base nessas informações, qual a probabilidade dos dois serem meninos?